

Séance du lundi 18 mai

1. Vous trouverez ci-dessous la correction des exercices donnés jeudi.
2. Recopier la suite de la leçon.
3. Faire et **ENVOYER** les exercices ci-dessous. Ne pas oublier que les exercices se font en utilisant la leçon.

Correction

Exercice 1

La droite (d) passe par le point A(-2 ; 2) et elle coupe l'axe des abscisses au point B d'abscisse 3.
Déterminer une équation de la droite (d).

La droite coupe l'axe des abscisses au point B d'abscisse 3. Le point B se trouve sur l'axe des abscisses.
D'où B(3 ; 0).

(d) passe par A(-2 ; 2) et B(3 ; 0).

$x_A \neq x_B$: (d) n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées. Elle a une équation réduite de la forme $y = mx + p$.

$m = \frac{2-0}{-2-3} = \frac{2}{-5}$ L'équation réduite est de la forme $y = \frac{-2}{5}x + p$.

B(3 ; 0) est un point de (d). Alors, $y_B = \frac{-2}{5}x_B + p$.

$$0 = \frac{-2}{5} \times 3 + p$$

$$0 = \frac{-6}{5} + p$$

$$\frac{6}{5} = p$$

Donc, l'équation réduite de (d) est $y = \frac{-2}{5}x + \frac{6}{5}$.

Exercice 2

On considère deux droites (d) et (d').

(d) : $-x + 2y - 5 = 0$

(d') passe par C(-3 ; -2) et D(3 ; 1)

Etudier la position des droites (d) et (d').

(d) : $-x + 2y - 5 = 0$. $a = -1$ $b = 2$ $c = -5$

Un vecteur directeur $\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Un vecteur directeur de (d') est $\overrightarrow{CD}$. $\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} 3+3 \\ 1+2 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\det(\vec{u}, \overrightarrow{CD}) = \begin{vmatrix} -2 & 6 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -2 \times 3 + 1 \times 6 = 0$. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

D'où (d) et (d') sont parallèles.

Vérifions si les droites sont confondues ou pas. Regardons si le point C est un point de (d).

$-x_C + 2y_C - 5 = 3 + 2 \times (-2) - 5 = 3 - 4 - 5 = -6 \neq 0$ C n'appartient pas à (d).

Finalement, (d) et (d') sont strictement parallèles.

Exercice 3

Déterminer l'équation réduite de la droite (d') parallèle à la droite (d) et passant par A.

$$(d) : y = -2x + 7 \quad A(4 ; 1)$$

▣ (d) et (d') sont parallèles. Elles ont le même coefficient directeur.

Or, (d) a pour coefficient directeur -2, (d') aussi.

L'équation réduite de (d') est de la forme $y = -2x + p$.

▣ A(4 ; 1) est un point de (d'). Alors, $y_A = -2x_A + p$.

$$1 = -2 \times 4 + p$$

$$1 = -8 + p$$

$$1 + 8 = p$$

$$p = 9$$

Donc, l'équation réduite de (d') est $y = -2x + 9$.

Exercice 4

Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la droite (d) avec l'axe des ordonnées.

$$(d) : 2y - 3x + 4 = 0$$

▣ A est le point d'intersection de la droite (d) avec l'axe des ordonnées. A se trouve sur l'axe des ordonnées et A(0 ; y_A).

▣ A(0 ; y_A) est un point de (d). Alors, $2y_A - 3x_A + 4 = 0$.

$$2y_A - 3 \times 0 + 4 = 0$$

$$2y_A = -4$$

$$y_A = -2$$

Donc, A(0 ; -2)

Exercices

Exercice 1

(d) est la droite d'équation cartésienne $x + y + 2 = 0$.

Déterminer une équation cartésienne de la droite (d') parallèle à la droite (d) et passant par A(3 ; -4).

Exercice 2

Résoudre les systèmes.
$$\begin{cases} 5x - 3y - 17 = 0 \\ 2x + y - 9 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - 3y + 1 = 0 \\ -3x + 4y - 2 = 0 \end{cases}$$

V- Systèmes de deux équations à deux inconnues

définitions

* Un système de deux équations à deux inconnues x et y est la donnée de deux équations

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases} \quad \text{où } a, b, c, a', b', c' \text{ sont des réels.}$$

* Résoudre un tel système, c'est trouver les couples de réels $(x ; y)$ qui vérifient les deux équations en même temps.

exemple

$$\begin{cases} x + y - 4 = 0 \\ 2x - y - 5 = 0 \end{cases}$$

▫ Le couple $(1 ; 3)$ n'est pas solution du système :

$$x + y - 4 = 1 + 3 - 4 = 0 \quad 2x - y - 5 = 2 \times 1 - 3 - 5 = -6 \neq 0$$

Le couple $(1 ; 3)$ ne vérifie pas la 2^{ème} équation.

▫ Le couple $(3 ; 1)$ est une solution du système :

$$x + y - 4 = 3 + 1 - 4 = 0 \quad 2x - y - 5 = 2 \times 3 - 1 - 5 = 0$$

Le couple $(3 ; 1)$ vérifie les deux équations.

1) Interprétation géométrique

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases} \quad (a ; b) \neq (0 ; 0) \text{ et } (a' ; b') \neq (0 ; 0)$$

Dans un repère orthonormé, $ax + by + c = 0$ est une **équation cartésienne d'une droite (d)** et

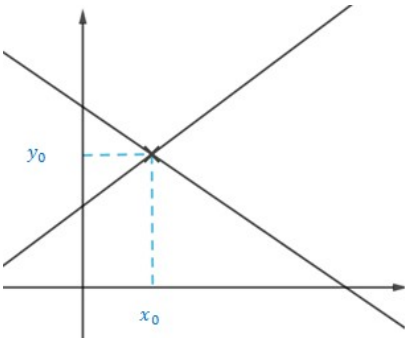
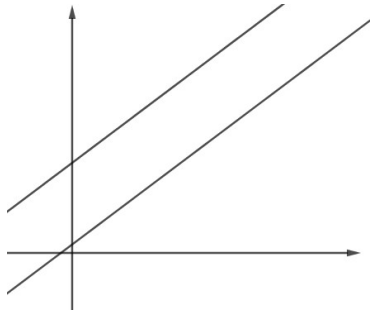
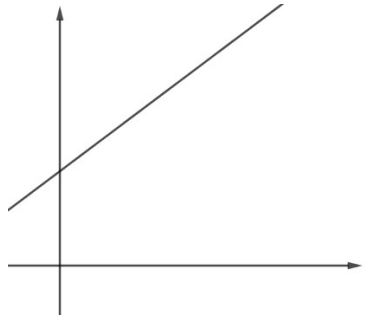
$a'x + b'y + c' = 0$ est une **équation cartésienne d'une droite (d')**.

Résoudre ce système, c'est déterminer les **coordonnées du point d'intersection éventuel** de ces deux droites.

$\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -b' \\ a' \end{pmatrix}$ sont les vecteurs directeurs respectifs de (d) et (d').

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} -b & -b' \\ a & a' \end{vmatrix} = -b \times a' + a \times b' = ab' - a'b$$

Il y a 3 cas possibles pour l'ensemble S des couples solutions du système :

$\det(\vec{u}, \vec{v}) \neq 0$	$\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$	
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires	$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires	
(d) et (d') sont sécantes au point $(x_0 ; y_0)$ 	(d) et (d') sont strictement parallèles 	(d) et (d') sont confondues 
Le système a un seul couple solution $(x_0 ; y_0)$. $S = \{ (x_0 ; y_0) \}$	Le système n'a pas de couple solution. $S = \emptyset$	Le système a une infinité de couples solutions.

2) Résolution de systèmes par la calcul

Il existe deux méthodes pour résoudre, par le calcul, un système.

Méthode 1 : Par substitution

$$\begin{cases} -2x + 3y + 2 = 0 \\ x - 2y - 3 = 0 \end{cases}$$

Un vecteur directeur de la 1^{ère} droites est $\vec{u} \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Un vecteur directeur de la 2^{ème} droites est $\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \times 1 + 2 \times 2 = -3 + 4 = 1 \neq 0$$

Le système a un seul couple solution.

méthode : On observe les équations pour chercher quelle inconnue, x ou y, on va « isoler » dans une des équations (par exemple : un x, un -x, un y ou un -y). On remplace l'inconnue isolée dans l'autre équation.

	$\begin{cases} -2x + 3y + 2 = 0 \\ x - 2y - 3 = 0 \end{cases}$	
équivalent à	$\begin{cases} -2x + 3y + 2 = 0 \\ x = 2y + 3 \end{cases}$	On « isole » l'inconnue x dans la 2 ^{ème} équation
équivalent à	$\begin{cases} -2(2y + 3) + 3y + 2 = 0 \\ x = 2y + 3 \end{cases}$	On remplace l'inconnue x dans la 1 ^{ère} équation
équivalent à	$\begin{cases} -4y - 6 + 3y + 2 = 0 \\ x = 2y + 3 \end{cases}$	Il ne reste plus que l'inconnue y
équivalent à	$\begin{cases} -y - 4 = 0 \\ x = 2y + 3 \end{cases}$	
équivalent à	$\begin{cases} y = -4 \\ x = 2y + 3 \end{cases}$	L'inconnue y a été trouvée
équivalent à	$\begin{cases} y = -4 \\ x = 2 \times (-4) + 3 \end{cases}$	On calcule l'inconnue x
équivalent à	$\begin{cases} y = -4 \\ x = -8 + 3 \end{cases}$	
équivalent à	$\begin{cases} y = -4 \\ x = -5 \end{cases}$	

Donc, le système a un couple solution (-5 ; -4).

Méthode 2 : Par combinaison

$$\begin{cases} 5x - 3y - 1 = 0 \\ -3x + 4y + 1 = 0 \end{cases}$$

Un vecteur directeur de la 1^{ère} droites est $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Un vecteur directeur de la 2^{ème} droites est $\vec{v} \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix}$.

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = 3 \times (-3) - 5 \times (-4) = -9 + 20 = 11 \neq 0$$

Le système a un seul couple solution.

méthode : On multiplie une équation (ou les deux équations) pour faire apparaître des coefficients opposés devant les x ou les y .

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 5x - 3y - 1 = 0 \\ -3x + 4y + 1 = 0 \end{cases} \\ \text{équivalent à } & \begin{cases} 15x - 9y - 3 = 0 \\ -15x + 20y + 5 = 0 \end{cases} & \begin{array}{l} \text{On multiplie la 1}^{\text{ère}} \text{ équation par 3.} \\ \text{On multiplie la 2}^{\text{ème}} \text{ équation par 5.} \\ \text{On a obtenu « 15x » et « -15x »}. \end{array} \\ \text{équivalent à } & \begin{cases} 15x - 9y - 3 = 0 \\ (15x - 9y - 3) + (-15x + 20y + 5) = 0 \end{cases} & \begin{array}{l} \text{On conserve une des deux équations obtenues} \\ \text{à l'étape précédente.} \\ \text{On additionne les deux équations obtenues à} \\ \text{l'étape précédente.} \end{array} \\ \text{équivalent à } & \begin{cases} 15x - 9y - 3 = 0 \\ 15x - 9y - 3 - 15x + 20y + 5 = 0 \end{cases} & \text{L'inconnue x s'élimine.} \\ \text{équivalent à } & \begin{cases} 15x - 9y - 3 = 0 \\ 11y + 2 = 0 \end{cases} & \text{On calcule l'inconnue y.} \\ \text{équivalent à } & \begin{cases} 15x - 9y - 3 = 0 \\ y = -\frac{2}{11} \end{cases} \\ \text{équivalent à } & \begin{cases} 15x - 9 \times \left(-\frac{2}{11}\right) - 3 = 0 \\ y = -\frac{2}{11} \end{cases} \\ \text{équivalent à } & \begin{cases} 15x + \frac{18}{11} - 3 = 0 \\ y = -\frac{2}{11} \end{cases} & \text{On calcule l'inconnue x.} \\ \text{équivalent à } & \begin{cases} 15x + \frac{18}{11} - 3 = 0 \\ y = -\frac{2}{11} \end{cases} \\ \text{équivalent à } & \begin{cases} 15x = \frac{15}{11} \\ y = -\frac{2}{11} \end{cases} \\ \text{équivalent à } & \begin{cases} x = \frac{15}{11} \div 15 \\ y = -\frac{2}{11} \end{cases} \\ \text{équivalent à } & \begin{cases} x = \frac{15}{11} \times \frac{1}{15} \\ y = -\frac{2}{11} \end{cases} \\ \text{équivalent à } & \begin{cases} x = \frac{1}{11} \\ y = -\frac{2}{11} \end{cases} \end{aligned}$$

Donc, le système a un couple solution $\left(\frac{1}{11} ; -\frac{2}{11}\right)$