

Chapitre 13 : Divisibilité

Objectifs du chapitre :

- Déterminer si un entier est ou n'est pas multiple ou diviseur d'un autre entier.
- Simplifier une fraction donnée pour la rendre irréductible.
- Division euclidienne (quotient, reste).
- Multiples et diviseurs.
- Notion de nombres premiers.

I - Définitions

Définition :

Dire que a est un multiple de b signifie qu'il existe un entier k tel que $a = b \times k$
On dira également que b divise a ou que b est un diviseur de a.

Exemple :

$18 = 6 \times 3$
donc 18 est un multiple de 3 (et aussi un multiple de 6)
6 divise 18 et 3 divise 18.
6 et 3 sont des diviseurs de 18.

Remarque :

1 divise tous les nombres entiers et par conséquent, tous les nombres sont leurs propres multiples.

Par exemple,
 $12 = 12 \times 1$ donc 1 divise 12 et 12 est un multiple de ... 12.

II Critères de divisibilité

Propriété :

Un nombre est divisible par 2 si : le chiffre des unités est 0,2,4,6 ou 8.
Un nombre est divisible par 3 si : la somme des chiffres du nombre est divisible par 3
Un nombre est divisible par 5 si : le chiffre des unités est 5 ou 0.
Un nombre est divisible par 9 si : la somme des chiffres du nombre est divisible par 9
Un nombre est divisible par 10 si : le chiffre des unités est 0.

Exemple :

3345 est divisible par 5 car le chiffre des unités est 5,
et par 3 car la somme de ses chiffres : $3+3+4+5=15$ et 15 est divisible par 3.

III Nombres premiers

Définition : Un nombre entier est premier s'il n'admet que deux diviseurs distincts, 1 et lui-même.

Exemple :

- Les nombres premiers sont : 2,3,5,7,11,13,17
- 1 n'est pas un nombre premier car il n'a qu'un seul diviseur.

IV Diviseurs communs

Définition : On dit qu'un nombre d est un diviseur commun à a et b si a et b sont divisibles par d.

Exemple : 2,3,5 sont des diviseurs communs à 60 et 90.

Définition :

On dit que deux nombres entiers sont premiers entre eux si leur seul diviseur commun est 1.

Exemple :

- Les diviseurs de 42 sont : 1,2,3,6,7,14,21,42.
- Les diviseurs de 51 sont : 1,3,17,51.

Les diviseurs communs de 42 et 51 sont 1 et 3, donc 42 et 51 ne sont pas premiers entre eux.

- Les diviseurs de 53 sont : 1, 53

Le seul diviseur commun de 42 et 53 est 1, donc 42 et 53 sont premiers entre eux.

Définition : Parmi les diviseurs communs à deux nombres a et b, le plus grand de ces diviseurs est appelé PGCD de a et b, noté $\text{PGCD}(a,b)$.

Exemple : 30 est le PGCD de 90 et 60. On écrit $\text{PGCD}(60;90)=30$.

V Décomposition

Propriété : On peut toujours décomposer un nombre non premier en produit de plusieurs facteurs premiers, cette décomposition est unique.

Exemple :

$$\begin{aligned} 324 &= 2 \times 162 \\ &= 2 \times 2 \times 81 \\ &= 2 \times 2 \times 3 \times 27 \\ &= 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 9 \\ &= 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \\ &= 2^2 \times 3^4 \end{aligned}$$