

Séance du mardi 31 mars

1. Vous trouverez, ci-dessous, la correction des derniers exercices.
Il faut prendre le temps de les retravailler, ainsi que les exercices précédents.
Ne pas hésiter à poser des questions.

2. Faire et envoyer, avant vendredi, les deux exercices.

Correction

Statistiques à deux variables-Etude de fonction

IMPEX est une société d'import-export spécialisée en produit pharmaceutiques. Les montants des exportations (en milliers d'euros) au cours des six dernières années sont consignés dans le tableau suivant :

Années	2014	2015	2016	2017	2018	2019
Rang des années	1	2	3	4	5	6
Montant des exportations	3,6	4,5	5,4	6	6,4	6,8

La société devra embaucher de nouveaux salariés si le montant des exportations dépasse 8 milliers d'euros.

1^{ère} partie :

1. Déterminer l'année au cours de laquelle la société devra embaucher du personnel. Pour cela, décrire la méthode utilisée.

Série statistique à 2 variables

On représente graphiquement, avec un tableur, cette série statistique.

Saisir dans la colonne A, le rang des années. Saisir dans la colonne B, le montant des exportations.

Sélectionner les deux colonnes, et afficher le nuage de points correspondant.

Suivant la forme du nuage de points, choisir une courbe de tendance et obtenir l'équation de la courbe de tendance.

Ensuite, on va utiliser l'équation de la courbe de tendance.

Ici, le nuage de points est de forme allongée. Donc, la forme de ce nuage de points permet un ajustement affine.

On choisit la courbe de tendance « linéaire ».

On obtient comme équation de la courbe de tendance $y = 0,6371x + 3,22$.

La société embauchera si le montant des exportations(y) dépasse 8 milliers d'euros.

On va résoudre l'équation $y = 0,6371x + 3,22 = 8$

$$0,6371x + 3,22 = 8$$

$$x \approx 7,5$$

A partir de la 8^{ème} année, la société embauchera de nouveaux salariés.

2^{ème} partie :

En raison de la crise, la société ne va pas évoluer aussi vite que prévu. Une étude mathématique plus poussée montre qu'en fait le montant des exportations ne va pas évoluer de façon linéaire.

Le montant des exportations en fonction du rang x de l'année est donné par la relation :

$$M_{\text{exp}}(x) = -0,08x^2 + 1,2x + 2,5$$

1. Calculer le montant des exportations pour l'année 2020.

$$2020, x = 7 \quad -0,08x^2 + 1,2x + 2,5 = -0,08 \times 7^2 + 1,2 \times 7 + 2,5 = 6,98 \quad 6\,980 \text{ €}$$

2. On considère la fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 20] par $f(x) = -0,08x^2 + 1,2x + 2,5$.

a. Déterminer f'(x) où f' est la fonction dérivée de la fonction f.

$$f'(x) = -0,08 \times 2x + 1,2 = -0,16x + 1,2$$

b. Résoudre l'équation $f'(x) = 0$.

$$-0,16x + 1,2 = 0$$

$$-0,16x = -1,2$$

$$x = 7,5$$

c. Compléter le tableau de variation de la fonction f.

x	0	7,5	20
Signe de f'(x)	+	0	-
Variations de la fonction f			

D'après ce qui précède, $f'(x)=0$ lorsque $x=7,5$.

On choisit par exemple $x=5$, et on remplace x par 5 dans l'expression de la fonction dérivée.

$$-0,16 \times 5 + 1,2 = 0,4 > 0$$

Sur $[0 ; 7,5]$, la dérivée est positive. Donc, la fonction f est croissante sur $[0 ; 7,5]$.

Sur $[7,5 ; 20]$, la dérivée est négative. Donc, la fonction f est décroissante sur $[7,5 ; 20]$.

$$f(0) = -0,08 \times 0^2 + 1,2 \times 0 + 2,5 = 2,5 \quad f(7,5) = -0,08 \times 7,5^2 + 1,2 \times 7,5 + 2,5 = 7 \quad f(20) = -0,08 \times 20^2 + 1,2 \times 20 + 2,5 = -5,5$$

d. D'après le tableau de variation, la fonction f admet-elle un maximum ? Si oui, lequel ?

D'après le tableau de variation, la fonction f admet un maximum pour $x=7,5$. Ce maximum est égal à 7.

3. La société devra-t-elle réaliser des embauches ? Justifier.

Comme le maximum de la fonction f est égal à 7, le montant des exportations ne dépassera pas 8 000 €.

Donc, la société ne réalisera pas d'embauches.

Fonctions du second degré

La société de restauration collective « Saveurs du monde » prépare et commercialise des repas cuisinés. Les contraintes de production imposent la préparation de 300 à 800 repas par jour.

1^{ère} partie : Calculs

1. Le coût de production C varie en fonction du nombre n de repas vendus par jour. Ce coût de production est donné par la relation $C = -0,005n^2 + 10n + 1200$.

Calculer le coût de production pour 500 repas vendus par jour.

$$C = -0,005 \times 500^2 + 10 \times 500 + 1200 = 4950 \text{ €}$$

2. On suppose que le prix de vente V de n repas vendus par jour est donné par la relation $V = 6n + 1800$, où n appartient à l'intervalle $[300 ; 800]$. Calculer le prix de vente pour 500 repas vendus.

$$V = 6 \times 500 + 1800 = 4800 \text{ €}$$

2^{ème} partie : Représentation graphique de fonctions

1. On considère la fonction f définie sur $[300 ; 800]$ par $f(x) = -0,005x^2 + 10x + 1200$.

a. Compléter le tableau de valeurs. Les résultats seront arrondis à la dizaine.

x	300	350	400	450	500	550	600	650	700	750	800
f(x)	3750	4090	4400	4690	4950	5190	5400	5590	5750	5890	6000

b. Tracer la représentation graphique de la fonction f dans le repère ci-dessous.

2. On considère la fonction g définie sur $[300 ; 800]$ par $g(x) = 6x + 1800$.

a. Tracer la représentation graphique de la fonction g dans le repère.

b. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$

Les deux représentations graphiques se coupent en un point d'abscisse 600.

La solution de l'équation $f(x) = g(x)$ est $x = 600$.

c. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) < g(x)$

Il faut que la représentation graphique de la fonction f soit en dessous de la représentation graphique de g. Les solutions de l'inéquation $f(x) < g(x)$ appartiennent à l'intervalle $]600 ; 800]$.

3. a. Montrer que l'équation $f(x) = g(x)$ peut s'écrire $-0,005x^2 + 4x - 600 = 0$.

$$f(x) = g(x)$$

$$-0,005x^2 + 10x + 1200 = 6x + 1800$$

$$-0,005x^2 + 10x + 1200 - 6x - 1800 = 0 \quad \text{Tout du même côté}$$

$$-0,005x^2 + 4x - 600 = 0$$

b. Résoudre l'équation $-0,005x^2 + 4x - 600 = 0$ dans l'intervalle $[300 ; 800]$.

$$-0,005x^2 + 4x - 600 = 0 \quad a = -0,005 \quad b = 4 \quad c = -600$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \times (-0,005) \times (-600) = 4$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 + \sqrt{4}}{2 \times (-0,005)} = 200$$

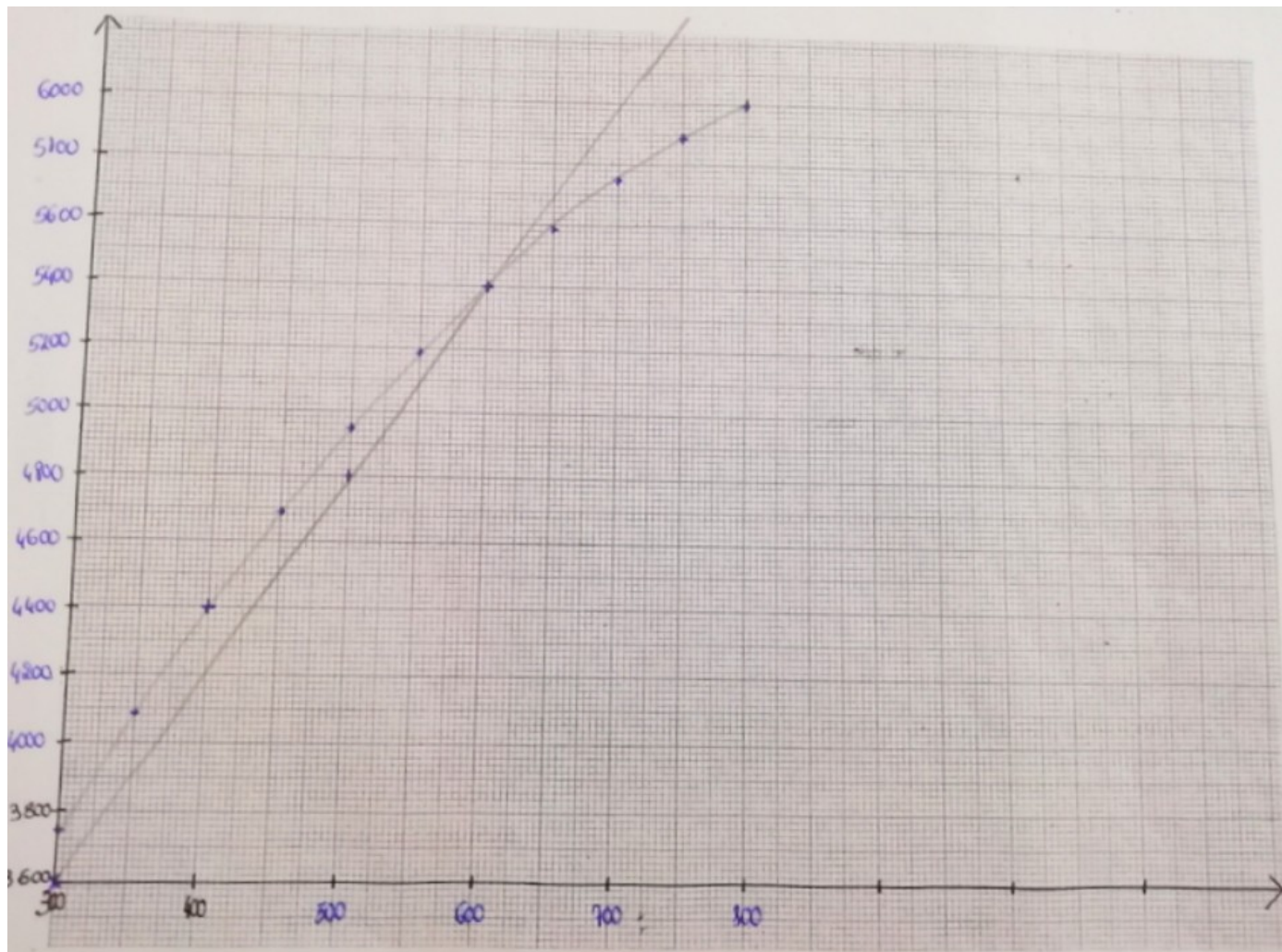
$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 - \sqrt{4}}{2 \times (-0,005)} = 600$$

Comme on doit résoudre l'équation dans l'intervalle $[300 ; 800]$, l'équation a une solution : 600.

4. Quel est le nombre de repas à partir duquel l'entreprise réalise des bénéfices.

Le coût de production doit être inférieur au prix de vente.

L'entreprise réalise des bénéfices au-delà de 600 repas vendus.



Exercice 1 Second degré

L'entreprise Luxmaroquinia produit des articles en cuir.

Pour une fabrication comprise entre 1 000 et 3 000 sacs par an, le bureau d'étude établit les éléments suivants (n désigne le nombre de sacs produits).

Le coût de production C en euros est donné par la relation $C(n) = 151\,500 + 76n + 0,01n^2$.

Le chiffre d'affaires P est donné par $P(n) = 320n - 0,04n^2$.

Le bénéfice B est égal à $B(n) = P(n) - C(n)$.

1. Pour $n = 2\,000$, calculer :

a. le coût de production :

b. le chiffre d'affaires correspondant :

c. le bénéfice réalisé :

2. Exprimer le bénéfice $B(n)$ en fonction de n . (écrire le bénéfice en utilisant n ; $B = P - C$)

3. La fonction f est définie sur l'intervalle $[1\,000 ; 3\,000]$ par $f(x) = -0,05x^2 + 244x - 151\,500$.

a. La fonction admet-elle un maximum ou un minimum (justifier la réponse) ? Combien vaut ce maximum ou ce minimum ? (utiliser le rappel après l'exercice)

b. Compléter le tableau de valeurs.

x	1 000	2 000	3 000
$f(x)$			

c. Etablir le tableau de variations de la fonction f .

x	
Variations de la fonction f	

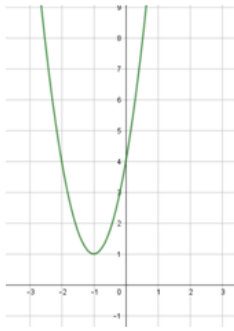
4. On admet que la fonction f représente le bénéfice réalisé sur la vente de x sacs.

a. Quel est le nombre d'articles qu'il faut fabriquer en un an pour obtenir le bénéfice maximal.

b. Donner ce bénéfice maximal.

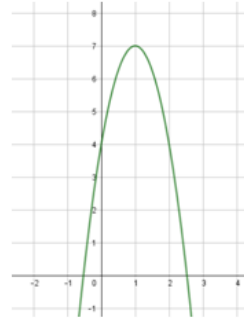
* Une **fonction polynôme du second degré** est définie pour tout nombre x par $f(x) = ax^2 + bx + c$; a, b, c sont des nombres réels ($a \neq 0$).

La **représentation graphique** de la fonction f est une **parabole** :



$$a > 0$$

La parabole est « tournée vers le haut »



$$a < 0$$

La parabole est « tournée vers le bas »

* Le **maximum** de l'expression $f(x) = ax^2 + bx + c$ est obtenu pour $x = \frac{-b}{2a}$.

* Une **équation du second degré** a pour forme générale $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$).

Le nombre de solutions de cette équation dépend de la valeur du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

Si $\Delta > 0$ alors l'équation a 2 solutions $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$.

Si $\Delta = 0$ alors l'équation a 1 solution $x_0 = \frac{-b}{2a}$.

Si $\Delta < 0$ alors l'équation n'a pas de solution.

Exercice 2 Probabilités

Leïla travaille au service reprographie de l'entreprise de son oncle. Dans la journée, elle a imprimé 2 000 documents : 1 600 en noir et blanc, le reste en couleur. Elle constate que 2% des documents noir et blanc et 3% des documents couleurs présentent des taches d'encre.

1. Calculer le nombre de documents ayant des taches d'encre.

2. Leïla choisit au hasard un document pour contrôle. On note A l'évènement : « le document est en couleurs » et B l'évènement : « le document est sans défaut ». Calculer la probabilité de l'évènement A , $p(A)$ et calculer la probabilité de l'évènement B , $p(B)$.

3. On définit l'évènement $A \cap B$: « le document est en couleurs **et** le document est sans défaut ». Calculer la probabilité de cet évènement $p(A \cap B)$.

$A \cap B$ (intersection des 2 évènements)	A et B	« le document est en couleurs et le document est sans défaut »
$A \cup B$ (union des 2 évènements)	A ou B	« le document est en couleurs ou le document est sans défaut »